

圆明亮琢型几何结构的研究

黄翰强¹, 卢振坤², 陈炳忠²

(1. 梧州光学仪器厂, 广西 梧州 543002; 2. 梧州学院, 广西 梧州 543002)

摘要: 采用数学方法和可视化计算机软件 Pro/E 与 MATLAB 处理圆明亮琢型切工参数与该琢型其它几何元素之间的定量关系。首先, 用数学语言描述托尔可夫斯基琢型亭部演化的规律。随后, 用分析表达式和图形表达以下几个问题的新见解: (1) 星刻面倾角不能随意取值, 它是某些切工参数的函数; (2) 腰棱厚度和腰棱总面积能够用数学公式定量描述; (3) 冠部俯视图的变化服从一定的数学约束条件, 认为台宽比评定中的“弧度法”不可行。分析结果表明将现代光学分析和 MATLAB 等计算机技术结合, 可用于宝石最优化设计。

关键词: 圆明亮琢型; 几何结构

中图分类号: TS93

文献标识码: A

文章编号: 1008-214X(2014)01-0056-06

Research of Geometric Structure of Round Brilliant Cut

HUANG Hanqiang¹, LU Zhenkun², CHEN Binzhong²

(1. Wuzhou Optical Instrument Factory, Wuzhou 543002, China;

2. Wuzhou University, Wuzhou 543002, China)

Abstract: Geometrical elements (point, line, plane, etc.) of round brilliant cut exist a functional relation, which can be expressed through analytic expressions. In this paper, quantitative relation of round brilliant cut, including cut parameters and the other geometric elements, is processed by mathematical method, visual computer software Pro/E and MATLAB.

Evolution of pavilion of round brilliant cut is visualized and analyzed quantitatively by Pro/E and MATLAB. The technical standards of the former Soviet Union put forward by Tolkowsky and Bruce Harding, are unified in our mathematical framework. Positive and inverse function relationship of $\beta' - \mu$ is revealed. Thus, gemstone optics and geometry are linked. Strictly speaking, round brilliant cut is an aesthetic effect of optical prism. Effect of the light and the material are embedded through the angle of components.

Mathematical formula of star facet inclination (γ) which is a function of table size (M), crown angle (β) and crown girdle facets (β') are derived. Star facet inclination (γ) can not take any value freely. Therefore, it corrected Tolkowsky's biased viewpoint.

The thickness and total area of waist can be quantitatively described by mathematical formula. In the paper, b_{\min} is minimum thickness of waist ridge which meets the structural

收稿日期: 2013-04-22

基金项目: 广西技术开发项目(桂科攻 11107007-4), 梧州市科技技术开发项目(201101049)

作者简介: 黄翰强(1935—), 男, 高级工程师, 主要从事宝石设计与加工。

通信作者: 卢振坤(1979—), 男, 梧州学院副教授, 博士, 主要从事图像处理, 宝石检测技术研究。E-mail: lzk06@sina.com

mechanical demand, and ensures that the finished product is not easy to be broken.

Three geometrical forms of crown vertical view are shown by using mathematical formulas and visualizations, and radian method which is one of the detection methods to determine the table size is denied.

Key words: round brilliant cut; geometric structure

关于圆明亮琢型的研究已经有很长时间,主要集中在火彩、亮度的研究^[1-2]以及一些切工参数的演化和设计^[3-5]上。在理论研究领域,关于圆明亮琢型几何结构的研究很少。关于圆明亮琢型的亭部,前苏联的技术标准^[6](25—07,1319—77)规定了底小瓣(下腰小面)深度比 μ 为 75%~90%,下腰小面深度比 $\mu = \frac{\text{下腰小面高度}}{\text{亭主面高度}} = \frac{Z}{H} = 75\% \sim 90\%$ (图 1)。1919 年托尔可夫斯基提出他的研究成果,亭角 $\rho = 40.75^\circ$ 光学效果较好,这一结果至今仍被沿用。至于下腰刻面倾角 ρ' ,他认为 $\rho' = \rho + 2^\circ$ 效果最好;为保证重量, $\Delta = \rho' - \rho \leq 3^\circ$ 也可以采用^[7-9]。1975 年,布鲁斯·哈丁(Bluce L. Harding)肯定了托尔可夫斯基关于 $\rho' = \rho + 2^\circ$ 的论述,同时指出这相当于下腰小面深度比应为 $\mu = 50\% \sim 70\%$ ^[8]。时至今日,亭部演化到亭深比 $\mu = 80\%$,对应 $\Delta = 1^\circ$,此时下腰面成为了主要的反射面。

目前,圆明亮琢型的切工参数设计除了运用几何光学之外主要是利用经验设计,因此也导致一些业内人士认为,圆明亮琢型的亭部主面太大,亮度不理想。其实,圆明亮琢型的几何结构设计的优劣影响宝石的火彩、亮度和外观等。笔者主要针对圆明亮琢型(主要是托尔可夫斯基琢型)的几何结构做深入的研究,找出该琢型的几何元素(点、线、面等)之间的关系,并且建立相关的数学模型,使得下腰刻面倾角、冠主角、星刻面倾角、腰棱厚度和面积等得以量化。这对圆明亮琢型的优化设计的定量评价具有重要的意义。另外,笔者也借助 Pro/E 和 MATLAB 两个软件顺利地“梳

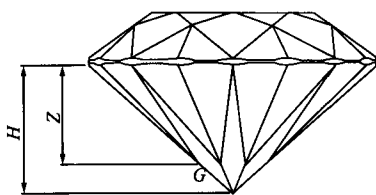


图 1 下腰小面高度(Z)和亭深(H)

Fig. 1 Depth of lower girdle facet(Z) and pavilion(H)

理”前人的研究结果(主要是托尔可夫斯基琢型),找出切工参数与其它几何元素的内在联系。

1 圆明亮琢型切工参数的数学模型

1.1 圆明亮琢型亭部演化计算

由下腰小面深度比定义 $\mu = \frac{Z}{H}$,利用空间几何知识得到,

$$H = \frac{D}{2} \tan \rho,$$

$$Z = \frac{\frac{D}{2} \cos 11.25^\circ (1 - \cos 22.5^\circ) \tan \rho' \tan \rho}{\cos 11.25^\circ \tan \rho' - \cos 22.5^\circ \tan \rho}, D \text{ 是}$$

腰围直径, ρ 是亭角, ρ' 是下腰刻面倾角,得到

$$\mu = \frac{\cos 11.25^\circ (1 - \cos 22.5^\circ) \tan \rho'}{\cos 11.25^\circ \tan \rho' - \cos 22.5^\circ \tan \rho} \quad (1)$$

由(1)式可以得到下腰刻面倾角 ρ' 满足

$$\rho' = \arctan \left[\frac{\mu \cos 22.5^\circ \tan \rho}{\cos 11.25^\circ} \right] \arctan \left[\frac{1}{\mu - 1 + \cos 22.5^\circ} \right] \quad (2)$$

在亭部演化过程中, $\rho = 40.75^\circ$ 保持不变,于是 $\mu - \Delta\rho$ 的关系被量化了。

关于圆形明亮型亭部演化的研究,得出下面量化的结果,如表 1 所示。

表 1 下腰深度比值与亭主角增量对照

Table 1 Comparison on increment of pavilion depth and pavilion angle

	下腰深度比值	亭主角增量
	μ	$\Delta = \rho' - \rho$
托尔可夫斯基和布鲁斯·哈丁的论述	62.42%	2°
	84.01%	1°
	50%~70%	$3^\circ \sim 1.57^\circ$
“破译”前苏联技术标准(25—07,1319—77)	75%~90%	$1.34^\circ \sim 0.81^\circ$

通过 Pro/E 处理,其中参数设置中假设腰围直径 $D = 6 \text{ mm}$,亭部演化过程中亭部主刻面(亭部四边形刻面)面积 S_1 与下腰面积 S_2 发生此消

彼长的变化(图2)。 $\Delta=3^\circ$ 时,即 $\rho=40.75^\circ$, $\rho'=43.75^\circ$,由相关公式计算得到 $Z=1.29\text{ mm}$, $H=2.58\text{ mm}$, $\mu=50\%$,与用Pro/E工具定量分析 μ 值是一致的,如图2中第一排第一个图所示。为此,进一步用Pro/E工具定量分析得到 $\frac{2S_2}{S_1} = \frac{2 \times 1.16\text{ mm}^2}{2.46\text{ mm}^2} = 0.94$,如图2中第一排第二个

图所示。而 $\Delta=1^\circ$ 时,即 $\rho=41.75^\circ$ 时, $\frac{2S_2}{S_1} = \frac{2 \times 1.97\text{ mm}^2}{0.79\text{ mm}^2} = 4.987$,如图2第三排第二个图所示,同时下腰面总面积($16S_2$)最终为亭主面总面积($8S_1$)的4.987倍。此时, ρ' 靠近最佳光学角度 ρ ,与布鲁斯·哈丁的结论“下腰面成为了主要反射面”^[8]一致。

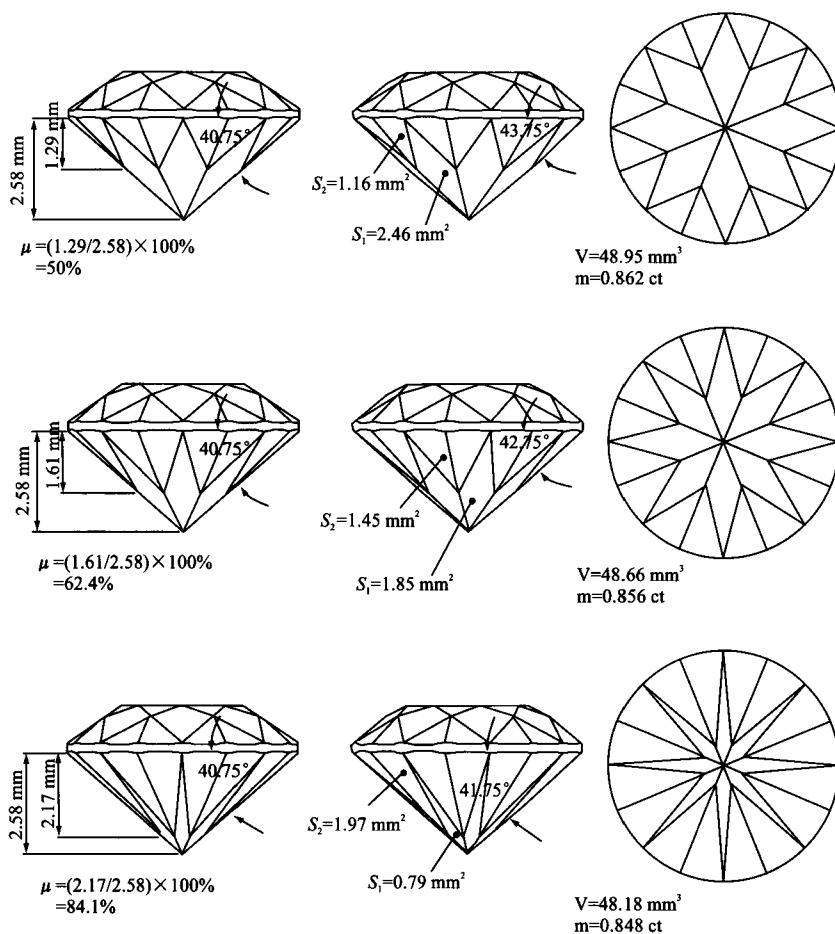


图2 亭部演化的Pro/E处理结果

Fig. 2 Results of Pro/E processing for pavilion

1.2 星刻面倾角(γ)的数学模型

业内人士指出:“台面大小确定以后,星小面也就随之确定了,不能任意选择,否则出现星撞或星离。”

研究发现,星刻面倾角(γ)是 M, β, β' 的函数,服从以下的分析表达式:

$$\gamma = \arctan \left[\frac{H - z}{x - \frac{1}{2}MD \cos 22.5^\circ} \right] \quad (3)$$

$$\gamma = \arctan \left[\frac{(\cos 22.5^\circ - M) \cos 11.25^\circ \tan \beta' - (1 - M) \cos 22.5^\circ \tan \beta}{(1 - M \cos 22.5^\circ) \cos 11.25^\circ \tan \beta' - (1 - M \cos^2 22.5^\circ) \tan \beta} \times \tan \beta \right] \quad (4)$$

其中, $H = \frac{D}{2}(1 - M) \tan \beta$,

$$x = \frac{\frac{D}{2} \cos 11.25^\circ \tan \beta' - \tan \beta}{\cos 11.25^\circ \tan \beta' - \cos 22.5^\circ \tan \beta},$$

$$z = \frac{\frac{D}{2} \cos 11.25^\circ (1 - \cos 22.5^\circ) \tan \beta' \tan \beta}{\cos 11.25^\circ \tan \beta' - \cos 22.5^\circ \tan \beta},$$

如图3所示,经过整理得到表达式(4)。

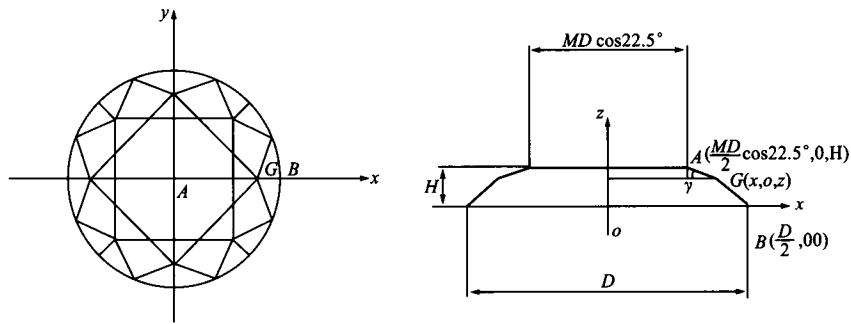


图 3 星刻面倾角

Fig. 3 Star facet inclination

式中, γ 是星刻面倾角, M 是台宽比, β 是冠主角, β' 是上腰面角, H 是冠高, x 和 z 分别是冠角刻面、上腰刻面和星刻面交点的横坐标值和纵坐标值。

以托尔可夫斯基琢型为例:取 $M=0.53$, $\beta=34.5^\circ$, 当 $\beta'=40^\circ$ 时, 代入(4)式求得 $\gamma=22.0536^\circ$, 而当 $\beta'=42^\circ$ 时, 求得 $\gamma=24.5537^\circ$, 与用 Pro/E 工具定量分析结果是一致的。

1.3 圆明亮琢型腰棱的数学模型

关于腰棱厚度的确定, 很多学者认为在确保成品不易破损的前提下, 尽可能将腰棱厚度做得薄一些, 以减少光损失。为了保证重量, 也有学者主张腰棱做厚一些^[10-11]。为了推导出圆明亮琢型的腰棱公式, 根据腰棱的几何结构, 如图 4 所示, 建立了坐标 x, y, z 之间的函数关系。

由 $\vec{n} \cdot \vec{P_0G} = 0$, 其中 $\vec{n} = (\sin\beta', 0, \cos\beta')$, $\vec{P_0G} = (x, y, z - z_0 - \frac{D}{2}\tan\beta')$ 得到:

$$\begin{cases} x \sin\beta' + (z - z_0 - \frac{D}{2}\tan\beta') \cos\beta' = 0 \\ x^2 + y^2 = (\frac{D}{2})^2 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $x = \frac{D}{2} \cos\Phi$, $y = \frac{D}{2} \sin\Phi$, 求解方程组(5)得到

$$z = z_0 + \frac{D}{2} (1 - \cos\Phi) \tan\beta' \quad (6)$$

相邻上腰面交于 $\Phi=11.25^\circ$ 处, 得到上腰面坐标:

$$z_1 = z_0 + \frac{D}{2} (1 - \cos\Phi) \tan\beta' \quad (7)$$

同理得到下腰面坐标:

$$z_2 = z_0 + \frac{D}{2} (1 - \cos\Phi) \tan\rho' \quad (8)$$

而 $b_{\max} = z_1 + z_2$, 从而得到腰棱厚度公式(9),

$$b_{\max} = b_{\min} + (1 - \cos 11.25^\circ) (\tan\beta' + \tan\rho') \frac{D}{2} \quad (9)$$

式中 b_{\max} 是腰棱最大厚度(mm), $b_{\min} = 2z_0$ 是腰棱最小厚度(mm), β' 是上腰面角, ρ' 是下腰面角, D 是腰围直径。

另外, 根据图 4, 阴影曲面面积是

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{D}{2} z d\Phi \quad (10)$$

其中, $z = z_1 + z_2$, 求解得到腰棱总面积公式

$$S = 32s = \pi D b_{\min} + \left(\frac{\pi}{16} - \sin 11.25^\circ \right) \times (\tan\beta' + \tan\rho') 8D^2 \quad (11)$$

由公式(9)和(11)可知, 通过 β' 和 ρ' 两个切工参数将冠部和亭部有机地联系起来。

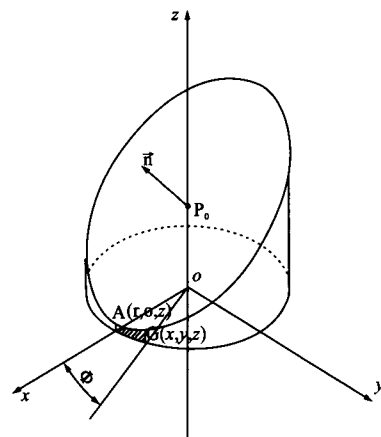


图 4 腰棱图

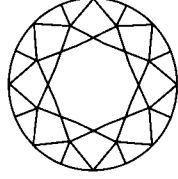
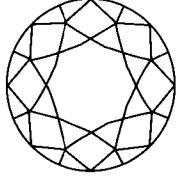
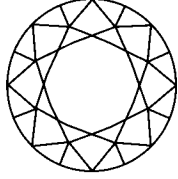
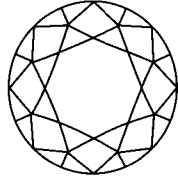
Fig. 4 Figure of waist

2 冠部俯视图和台宽比(M)关系研究

利用 Pro/E 极其方便的修改(设计)功能研

表2 两种琢型冠部俯视图形的变化

Table 2 Changes of crown vertical view for two cuts

项目	托尔可夫斯基琢型		标准琢型(1969年)	
台宽比(M)	0.53	0.53	0.575	0.575
冠主角(β)	34.5°	34.5°	34.5°	34.5°
上腰面角(β')	40°	42°	40°	42°
相互交叠“正方形”	稍微向内弯折	非常明显向内弯折	稍微向外拱起	稍微向内弯折
冠部俯视图				

究托尔可夫斯基琢型和标准琢型在上腰面角 β' 分别是40°和42°时冠部图形的变化形态,如表2所示。

托尔可夫斯基琢型的上腰面角在40°或是42°时冠部俯视图中的相互交叠“正方形”都呈现向内弯折的状态,只是弯折程度有所不同;对于标准琢型(台宽比0.575),当上腰面角是40°时,相互交叠“正方形”稍微向外拱起,而 $\beta' = 42^\circ$ 时,相互交叠“正方形”稍微向内弯折。在台宽比评定的弧度法^[10-11]中,两个相互交叠的“正方形”还存在第三种形态,即“正方形的边是平直”的情形。为了弄清楚这个问题,本文借助数学和计算机技术。

相互交叠“正方形”的边是平直的条件满足(图5):

$$x_0 \sin 45^\circ = \frac{MD}{2} \cos 22.5^\circ \quad (12)$$

即 $x_0 = \frac{MD}{4 \sin 22.5^\circ}$, 另外 x_0 还满足

$$x_0 = \frac{\frac{D}{2} (\cos 11.25^\circ \tan \beta' - \tan \beta)}{\cos 11.25^\circ \tan \beta' - \cos 22.5^\circ \tan \beta} \quad (13)$$

联合(12)和(13)式得到

$$\beta'_0 = \arctan \left[\frac{(2 \sin 22.5^\circ - M \cos 22.5^\circ) \tan \beta}{\cos 11.25^\circ (2 \sin 22.5^\circ - M)} \right] \quad (14)$$

式中, β'_0 是产生边是平直的相互交叠正方形时的上腰面角, M 是台宽比, β 是冠主角。

根据表2,对于“托尔可夫斯基琢型”,把相关参数代入(14)式求得 $\beta'_0 = 39.38^\circ$,对于标准琢型,同理求得 $\beta'_0 = 40.757^\circ$ 。以下是Pro/E给出的可视化答案(图6)。Pro/E建模时(琢型冠部)需要以下参数:腰围直径 D (本例 D 可以任意取

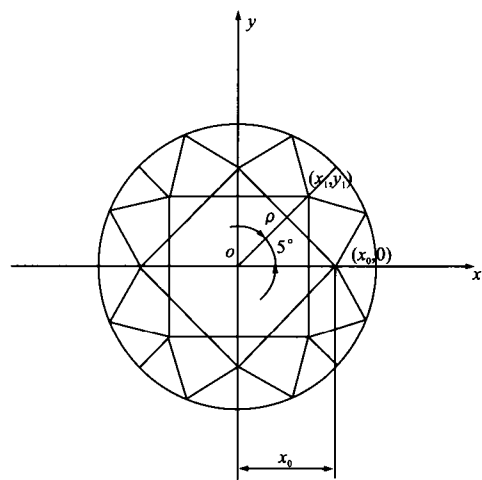
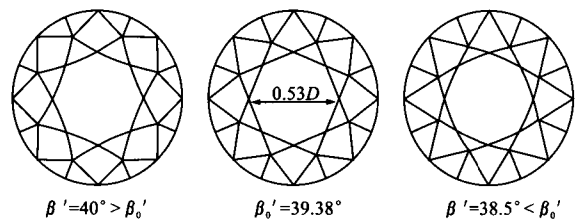


图5 俯视图

Fig. 5 Vertical view

①托尔可夫斯基琢型:台宽比 $M=0.53$



②标准琢型:台宽比 $M=0.575$

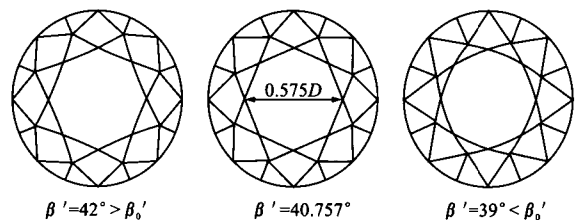


图6 俯视图三种形态的Pro/E处理

Fig. 6 Results of Pro/E processing for three forms of vertical view

值)、冠角 β 、上腰刻面倾角 β' 和台宽比 M ,本例中托尔可夫斯基琢型 $M=0.53$,标准琢型 $M=0.575$ 。由此表明冠部俯视图呈现两个相互交叠的“正方形的边是平直的”条件,台宽比不一定是0.60。“弧度法”确实是不可行的。

3 结论

研究发现,圆明亮琢型的几何元素(点、线、面等)之间存在函数关系,并且可以用分析表达式来描述。本文采用数学方法和可视化计算机软件Pro/E与MATLAB处理圆明亮琢型立方氧化锆切工参数与该琢型其它几何元素之间的定量关系,得到以下几个结论:

(1)用Pro/E和MATLAB对圆明亮琢型的亭部演化作出可视化和定量分析处理;同时揭示了 $\beta'-\mu$ 的正、反函数关系,从而将宝石光学与宝石几何学联系起来;

(2)提出星刻面倾角(γ)的数学公式,它是台宽比(M),冠主角(β)与上腰面角(β')的函数,并且 γ 不能任意取值;

(3)用数学公式定量描述腰棱厚度和腰棱总面积。指出 b_{\min} 是结构力学需求的腰棱最小厚度,保证成品不易破碎;

(4)用数学公式和可视化处理展现出冠部俯视图的三种几何形态,否定了“弧度法”是确定台

宽比大小的检测方法之一。

参考文献:

- [1] Reinitz I M, Johnson M L, Hemphill T S, et al. Modeling the appearance of the round brilliant cut diamond: An analysis of fire, and more about brilliance[J]. *Gems & Gemology*, 2001, 37(3): 174-1.
- [2] Hemphill T S, Reinitz I M, Johnson M L, et al. Modeling the appearance of the round brilliant cut diamond: An analysis of brilliance[J]. *Gems & Gemology*, 1998, 34(3): 158-183.
- [3] 石斌,袁心强.圆明亮琢型的星刻面和上、下腰刻面倾角数值计算[J]. *宝石和宝石学杂志*, 2010, 12(4): 40-47.
- [4] 余悠,袁心强,石斌,等.圆明亮琢型钻石的计算机自动三维解析模型构建方法研究[J]. *宝石和宝石学杂志*, 2010, 12(2): 35-38.
- [5] 石斌,袁心强.圆钻琢型光学效果的仿真模拟研究——模型与原理[J]. *宝石和宝石学杂志*, 2007, 9(2): 8-12.
- [6] 耶比凡诺夫. 钻石加工工艺学[M]. 史恩赐,译. 广州: 广东科技出版社, 1991.
- [7] 周汉利. 宝石琢型设计及加工工艺学[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 2009: 8.
- [8] Harding B L. Diamond study[EB/OL]. <http://www.gemology.ru/cut/english/tolkow2/>, 2001-03-19.
- [9] Tolkowsky M. Diamond design: A study of the reflection and refraction of light in a diamond[M]. London: E. & F. N. Spon, Ltd, 1919.
- [10] 张蓓莉. 系统宝石学[M]. 2版. 北京: 地质出版社, 2006.
- [11] 袁心强. 宝石分级的原理与方法[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 1998: 5.